

ЛЕКЦІЯ №9. ДЕТЕРМІНОВАНИЙ ХАОС У МОДЕЛІ АТРАКТОРА ТА У СИСТЕМАХ З ДИСКРЕТНИМИ ЗНАЧЕННЯМИ ДИНАМІЧНИХ ЗМІННИХ

9.1. Дивний атрактор

Системи з дивним атрактором є класичними прикладами систем, що мають хаотичну поведінку. Уявлення про дивний атрактор було запроваджене Лоренцем в 1963 р. [72] при дослідженні турбулентності в задачі Бенара. Ця задача була розглянута нами в підрозділі 5.3. Вже йшлося про те, що при невеликих градієнтах температур ΔT , які утворюються внаслідок різниці температур на верхній і нижній поверхнях рідини, рідина є нерухомою. При критичних значеннях $\Delta T = \Delta T_c$ виникає конвективна нестійкість Бенара. Лоренц, спростивши задачу до дослідження системи трьох нелінійних рівнянь (5.90), показав, що за деяких значень параметра λ , пов'язаного з градієнтом температури, більшим за λ_c , поведінка фазової траєкторії має дивний характер. На рис. 9.1 зображена проекція на площину XZ , фазової траєкторії, отриманої з числового розв'язку системи рівнянь (5.90) при $\lambda = 28, \delta = 10, b = 8/3$. Фазова траєкторія здійснює кілька обертів навколо однієї точки, переходить до іншої, здійснює кілька обертів навколо неї, потім повертається до першої точки, обертається навколо неї і т. д. (рис. 9.1). При цьому кількість обертів, що здійснює фазова траєкторія при кожній новій появі, передбачити неможливо. Розв'язок занадто швидко змінюється при малих змінах початкових умов. Системи, що мають подібну поведінку називають системами з дивним атрактором. Атракторами називають множини в фазовому просторі, які притягують траєкторії. Прикладами простих атракторів є стійкі стаціонарні точки, граничні цикли. У фазовому просторі в околі атрактора існує область притягання і система, що знаходилась в якійсь точці цієї області, з часом потрапляє в стаціонарну точку або на граничний цикл. У системах, які описуються двома змінними,

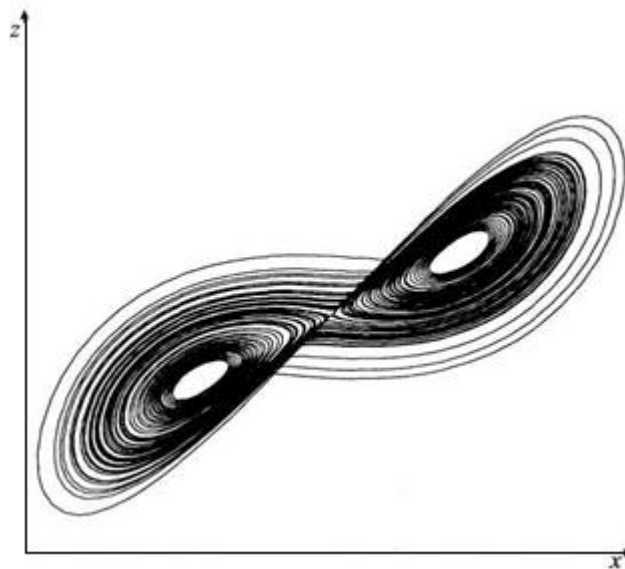


Рис. 9.1. Дивний аттрактор Лоренца

аттракторами можуть бути тільки стаціонарні точки й граничні цикли і тому хаотичні режими в них не реалізуються. Дивний аттрактор виникає в системах з числом змінних більшим за два.

Хаотичні режими спостерігаються в деяких простих механічних системах, які перебувають під дією зовнішньої періодичної сили, наприклад, для ангармонічного осцилятора в періодичному полі. Ця система описується рівнянням

$$\ddot{X} + \gamma \dot{X} + \omega_0 X - \beta X^3 = r \cos(\omega t) \quad (9.1)$$

При малих амплітудах зовнішньої сили в системі відбуваються періодичні коливання з частотою коливань зовнішньої сили. Зі збільшенням амплітуди подвоюється період коливань. Потім рух стає хаотичним.

9.2. Розпізнавання хаосу

Розглянемо кілька методів, які дають можливість відрізнити хаотичний рух від регулярного.

1) Спектр автокореляційної функції змінюється у разі переходу від режиму регулярного руху до хаотичного. Автокореляційна функція визначається формулою

$$g(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T dt X(t) X(t + \tau). \quad (9.2)$$

Кореляційна функція є мірою когерентності значень динамічної змінної в різні моменти часу. Для регулярних рухів вона є постійною або осцилює, а в хаотичному режимі спадає зі збільшенням τ .

Спектр автокореляційної функції визначається після фур'є-перетворення

$$g(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau e^{-i\omega\tau} g(\tau). \quad (9.3)$$

Для періодичних коливань спектр є сукупністю 5-подібних піків, для хаотичного руху — спектр суцільний.

2) Хаотичний режим можна визначити з показників Ляпунова.

Розглянемо дві траєкторії, які розвиваються в даній системі при різних значеннях початкових умов при $t=0$: $\mathbf{X}_1(0)$ і $\mathbf{X}_2(0)$. Визначимо відстань між траєкторіями за формулою

$$\Delta(t) = \sqrt{(\mathbf{X}_1(t) - \mathbf{X}_2(t))^2}. \quad (9.4)$$

Введемо величину σ , яка називається показником Ляпунова, за співвідношенням

$$\sigma = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \frac{\Delta(t)}{\Delta(0)}. \quad (9.5)$$

Якщо траєкторія є розбіжною, то при $t \rightarrow \infty$

$$\Delta(t) \approx \Delta(0) \exp(\sigma t), \sigma > 0. \quad (9.6)$$

При скінченній відстані між траєкторіями $\sigma \rightarrow 0$. Якщо траєкторії наближаються, $\sigma < 0$. Таким чином, для стохастичного руху $\sigma > 0$, а для регулярного $\sigma \leq 0$. Для систем з d -вимірним фазовим простором існує набір показників Ляпунова σ_i .

3) Наявність хаосу визначається перерізами Пуанкаре. Розглянемо перетини траєкторії з довільною площиною. Множина точок, в яких

траєкторія перетинає площину називається відображенням Пуанкаре. При зміні характеру руху змінюється множина цих точок. Для регулярного руху відображення Пуанкаре є сукупністю окремих точок, які зі збільшенням часу спостереження переходять у замкнені криві, тоді як для хаотичного руху точки розміщені безладно.

Існують різні сценарії або шляхи, за якими нелінійні системи можуть стати хаотичними. При цьому виявляється їхня універсальна поведінка, подібна до поведінки параметрів систем при фазових перетвореннях. Такими шляхами можуть бути: 1) поява дивного атрактора і перехід до хаосу після кількох біфуркацій; 2) перехід до хаосу після нескінченного каскаду подвоєння періоду (приклад такого переходу буде розглянутий далі); 3) перехід до хаосу через перемежування. Під перемежуванням розуміється така залежність динамічних змінних від часу, при якій чергуються випадково регулярні фази і нерегулярні сплески. Число сплесків зростає при збільшенні зовнішнього параметра i , врешті-решт, з'являється. Оскільки діапазон поведінки нелінійних систем надзвичайно великий, можливості переходу до хаосу є різноманітними. Детальне описування сценаріїв переходу до хаосу наведене у роботах [134], [135].

9.3. Хаос у системах з дискретними значеннями динамічних змінних

9.3.1. Точкові відображення

Точкове відображення є окремий розділ теорії динамічних рівнянь, у якому досліджуються об'єкти в дискретні моменти часу. Рівняннями для динамічних змінних є рівняння в скінченних різницях

$$X_{n+1} = \varphi(X_n) \quad (9.7)$$

Співвідношення (9.7) визначає точкове відображення

$$X_0, X_1, \dots, X_n, X_{n+1}, \quad (9.8)$$

де X_0 — початкова точка.

Рівняння (9.7) визначає X_{n+1} через початкове значення X_0 .
 Стаціонарна точка рівняння (9.7) визначається співвідношенням

$$X^{(s)} = \varphi(X^{(s)}). \quad (9.9)$$

Стабільність стаціонарної точки означає, що для малих відхилень значення $X^{(s)}$ з рівняння (9.7) має місце $X_n \rightarrow X^{(s)}$ при $n \rightarrow \infty$. Для дослідження стабільності розглянемо малі відхилення від стаціонарної точки і проаналізуємо його еволюцію при $n \rightarrow \infty$

$$X_n = X^{(s)} + \delta X_n. \quad (9.10)$$

Підставляючи (9.10) у рівняння (9.7) отримаємо значення відхилення для точки $n + 1$

$$\delta X_{n+1} = \frac{\partial \varphi(X^{(s)})}{\partial X^{(s)}} \delta X_n. \quad (9.11)$$

Розв'язок рівняння (9.11) запишемо так:

$$\delta X_n = a p^n, \quad (9.12)$$

де a — стала величина, а величина p дорівнює

$$p = \frac{\partial \varphi(X^{(s)})}{\partial X^{(s)}} \quad (9.13)$$

Враховуючи (8.167), маємо, що розв'язок $X^{(s)}$ є стійким ($\delta X_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$), якщо

$$-1 < p < 1. \quad (9.14)$$

Умови (9.12) і (9.14) означають, що для стабільності розв'язку необхідно, аби кут між дотичною до кривої $\varphi(X^{(s)})$ і віссю X знаходився в межах від $-\pi/4$ до $\pi/4$.

Одновимірне відображення має цикл m -го порядку, якщо виконуються умови

$$X_2 = \varphi(X_1), X_3 = \varphi(X_2), \dots, X_1 = \varphi(X_m). \quad (9.15)$$

У цьому випадку існують m динамічних змінних і відображення (9.15) послідовно переводить систему від одного значення до іншого. Точка повертається до початкового значення після m кроків, що подібне до циклу при неперервній зміні аргументу.

9.3.2. Логістичне відображення

Для логістичного відображення функція $\varphi(X_n)$ визначається співвідношенням

$$\varphi(X_n) = \lambda X_n (1 - X_n) \quad (9.16)$$

Функція $\varphi(X_n)$ має горб (див. рис. 9.2) і набуває максимального значення $\lambda/4$ при $X_n = 1/2$. Значення λ змінюється в межах $1 \leq \lambda \leq 4$. Дві стаціонарні точки визначаються з рівняння (9.9):

$$X^{(1)} = 0, \quad (9.17)$$

$$X^{(2)} = 1 - \frac{1}{\lambda}.$$

(9.18)

З (9.13) і (9.16) маємо, що $p = \lambda$ для особливої точки $X^{(1)}$. Оскільки λ змінюється від 1 до 4, з (9.14) випливає, що особлива точка $X^{(1)} = 0$ є нестійкою. Для a особливої точки $X^{(2)}$

$$p = 2 - \lambda. \quad (9.19)$$

Ця точка є стабільною в області $1 \leq \lambda \leq 3$

Проаналізуємо динаміку станів та їхню стабільність при зростанні параметра λ від значення $\lambda = 1$. На рис. 9.2 показана послідовність відображень від початкової точки X_0 до стаціонарної точки $X^{(2)}$. У цьому разі значення кінцевої точки не залежить від початкової точки. Зі збільшенням λ горб

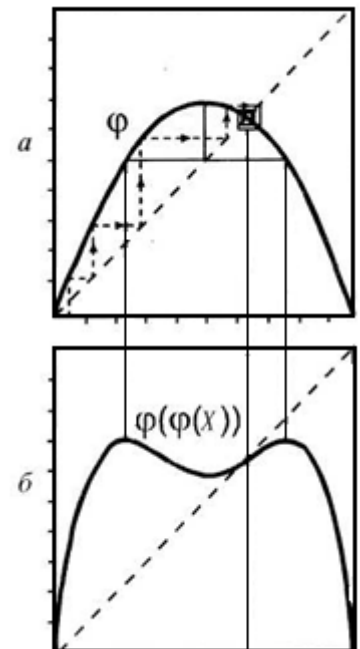


Рис. 9.2. Логістичне відображення з однією стабільною точкою

кривої $\varphi(X)$ стає більш крутим, кут дотичної до кривої зростає і при $\lambda_{c1} = 3$ стаціонарний стан $X^{(2)}$ стає нестабільним. При подальшому зростанні λ відображення переходить у граничний цикл. Щоб показати це, розглянемо другу ітерацію функції $\varphi(X)$

$$X_{n+2} = \varphi(\varphi(X_n)) = \varphi^{(2)}(X_n) \quad (9.20)$$

Функція $\varphi^2(X)$ наведена на рис. 9.2, б для $\lambda < \lambda_{c1}$ і на рис. 9.3, б для $\lambda > \lambda_{c1}$. Стаціонарні точки послідовності (9.20) визначаються співвідношенням $X_2^{(s)} = \varphi^{(2)}(X_2^{(s)})$. З рис. 9.2, а і 9.2, б видно, що в підкритичній області стаціонарні точки функцій $\varphi(X)$ і $\varphi^{(2)}(X)$ збігаються і мають стійкість однакового типу. У надкритичній області ($\lambda > \lambda_{c1}$)

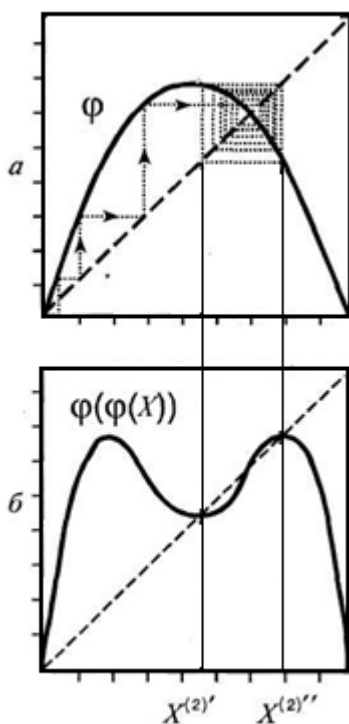


Рис. 9.3. Логістичне відображення із стабільним циклом

первинна стаціонарна точка $X^{(2)}$ стає нестабільною, а в околі цієї точки по різні боки від неї з'являються два нових стабільних сателіти $X^{(2)'}$ і $X^{(2)''}$.

При $n \rightarrow \infty$ значення X_n у послідовності (9.7) переключається відзначення одного сателіта до іншого (рис. 9.3). Отже, виникає граничний цикл з періодом 2. Стабільність граничного циклу означає, що при великій кількості ітерацій система наближається до граничного циклу при довільній початковій точці X_0 .

З подальшим зростанням λ , при $\lambda = \lambda_n 2 = 3,414$ цикл з періодом 2 стає нестабільним. Кожна із сателітних точок $X^{(2)'}$ і

$X^{(2)''}$ стає нестабільною і в околі кожної з них виникають дві нові сателітні точки. Вони відповідають появі асимптотично стабільних осциляцій з

періодом 4. Із зростанням λ відбувається каскад біфуркацій з подвоєнням періоду [135]. Стаціонарні точки $X^{(s)}$ на інтервалі $[0,1]$ розміщені нерегулярно: існують області, де точки відсутні («пусті» множини, див. рис. 9.4). траєкторій не є стабільною.

При $\lambda > \lambda_c = 3,57$ жодна з періодичних

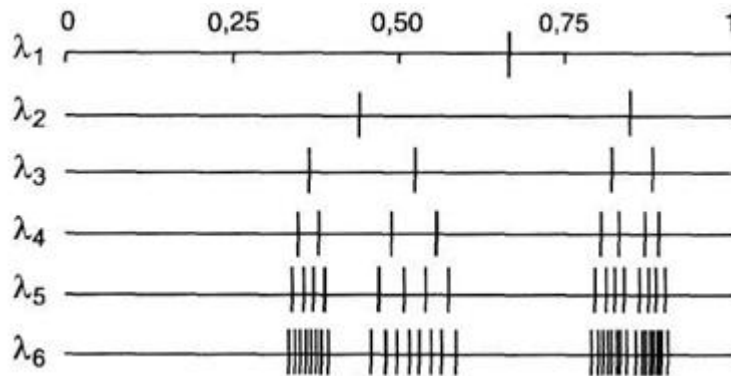


Рис. 9.4. Схематичне зображення заповнення одиничного інтервалу точками при послідовних подвоєннях періоду циклу

Цей режим називається хаотичним. Для хаотичного режиму область значень, які приймає X , складається з підмножин на інтервалі $[0,1]$.

Фейгенбаум визначив шлях для переходу до хаосу досліджуваної системи. Існує рекурентна формула для критичних значень λ

$$\frac{\lambda_{cn} - \lambda_{cn-1}}{\lambda_{cn+1} - \lambda_{cn}} = \delta, \quad (9.21)$$

де $\delta = 4,66920\dots$.

Існує також універсальне співвідношення для пакування критичних точок при послідовних зображеннях.

9.3.3. Показники Ляпунова для точкових відображень

Визначимо для точкових відображень показник Ляпунова, який характеризує розбігання траєкторій.

Розглянемо дві траєкторії $X_0, X_1, \dots, X_n, \dots$ і $\tilde{X}_0, \tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_n, \dots$, для яких початкові значення відрізняються нескінченно малою величиною

($\tilde{X}_0 = X_0 + \varepsilon$). Вважаючи, що динамічні змінні для однакового значення n мало відрізняються для обох траєкторій, дістанемо

$$\delta X_n = \tilde{X}_n - X_n = \left(\frac{\partial \varphi(X)}{\partial X} \right)_{X_{n-1}} \delta X_{n-1}. \quad (9.22)$$

або

$$\delta X_n = \prod_{n=1}^m \left(\frac{\partial \varphi(X)}{\partial X} \right)_{X_{n-1}} \varepsilon. \quad (9.23)$$

Представимо різницю динамічних змінних у двох траєкторіях у вигляді

$$|\delta X_N|_{N \rightarrow \infty} = \varepsilon \exp(\sigma(X_0)N), \quad (9.24)$$

де $\sigma(X_0)$ – показник Ляпунова.

Порівнюючи (9.22) з (9.24), маємо

$$\sigma(X_0) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \ln \left| \left(\frac{\partial \varphi(X)}{\partial X} \right)_{X_{n-1}} \right|. \quad (9.25)$$

Якщо $\sigma(X_0) < 0$, траєкторія є стійкою, якщо $\sigma(X_0) = 0$, траєкторія нейтральна, при $\sigma(X_0) > 0$ траєкторія є хаотичною.

В області зміни параметрів $1 < \lambda \leq 3$ у логістичному відображенні (9.16) існує одна стійка точка. У цьому разі незалежно для початкової точки X_0 значення X_n при $n \rightarrow \infty$ набуває значення $X^{(2)} = (1 - 1/\lambda)$. Тому для показника Ляпунова з (9.25) маємо

$$\sigma(\lambda) = \ln|2 - \lambda|. \quad (9.26)$$

У точці $\lambda = \lambda_{c1} = 3$ показник Ляпунова дорівнює нулю. У цій точці спостерігається біфуркація подвоєння періоду. Те, що показник Ляпунова дорівнює нулю в цій точці, означає, що до утворення якісно нової структури траєкторія повинна пройти через нейтрально стійкий аттрактор.

При $\lambda = \lambda_{c1}$ у системі існують два граничних цикли, тобто існують дві точки, до яких збігається послідовність при довільному значенні X_0 . Тоді в

сумі (9.25) при $N \rightarrow \infty$ відмінні від нуля два члени і для показника Ляпунова дістанемо

$$\sigma(\lambda) = \ln|\lambda^2 - 2\lambda - 4|. \quad (9.27)$$

У цій області значень зовнішнього параметра показник Ляпунова є від'ємним і розв'язок є стійким. Він дорівнює нулю при $\lambda = \lambda_{c2}$ (при наступному подвоєнні періоду). Це повторюється до критичної точки $\lambda_c = 3,57$: показник Ляпунова від'ємний і набуває значення нуль у точках біфуркації. У точці $\lambda = \lambda_c$ $\sigma(\lambda_c) = 0$, при $\lambda > \lambda_c$ $\sigma(\lambda_c) > 0$ і поведінка системи має хаотичний характер. Показник Ляпунова змінює знак у «вікнах» λ , в яких рух є регулярним. Залежність $\sigma(\lambda)$ в околі критичної точки має універсальну форму

$$\sigma(\lambda) \approx (\lambda - \lambda_c)^\beta, \quad (9.28)$$

де $\beta = 0,4498$

Співвідношення (9.28) нагадує поведінку параметра порядку поблизу точки фазового переходу (див. формулу (2.53)).

9.4. Фрактальні структури та розмірність дивних атракторів

Фракталами називають системи, що мають масштабну інваріантність: складова частина системи має ті ж елементи як і первинна система, з котрої ця частина вибрана.

Об'єкти, які ми спостерігаємо в повсякденному житті, є множинами d -мірного Евклідового простору. Простір об'єкта характеризується топологічною розмірністю. Для точки $d = 0$, для скінченної множини точок також $d = 0$. Для площини розмірність дорівнює 2, для кулі — 3. Проте це визначення не завжди відображає фундаментальні властивості об'єкта. Так, Броунівський рух частинки може бути описаний ламаною лінією, і здавалося б, що розмірність цієї лінії повинна дорівнювати 1. Проте внаслідок постійної зміни напрямку руху, траєкторія частинки покриває площину. Щоб

схарактеризувати складні об'єкти такого типу, використовують визначення розмірності, запропоноване Хаусдорфом. Щоб зрозуміти це визначення, розглянемо кілька прикладів самоподібних об'єктів.

Розглянемо пряму лінію довжини X . Розмірність такої системи очевидно дорівнює одиниці. Інтервал може бути поділений на N інтервалів, що не перекриваються. Координати n -го інтервалу визначаються умовою

$$\frac{(n-1)X}{N} < x < \frac{nX}{N} \quad (9.29)$$

де n набуває значень від 1 до N . Кожен з інтервалів є подібним до цілого інтервалу з коефіцієнтом подібності $\tau(N) = 1/N$. Система є само подібною, що значить — частина системи має такі самі властивості, як ціла система.

Тепер розглянемо прямокутник з розмірністю 2 і розмірами X і Y . Прямокутник може бути розділений на N малих прямокутників, які не перекриваються і координати яких визначаються формулами

$$\frac{(n_1-1)X}{\sqrt{N}} < x < \frac{n_1X}{\sqrt{N}}, \quad \frac{(n_2-1)Y}{\sqrt{N}} < y < \frac{n_2Y}{\sqrt{N}}, \quad (9.30)$$

де n_1 і n_2 набувають значень від 1 до \sqrt{N} . Кожен з прямокутників може бути одержаний з первинного прямокутника перетворенням з коефіцієнтом подібності $\tau(N) = 1/\sqrt{N}$.

Узагальнюючи результати, запишемо $\tau(N) = 1/N^{1/D}$, де D є умовна розмірність об'єкта, а N — число елементів, на яке поділений об'єкт. Введемо визначення

$$D = -\frac{\ln N}{\ln \tau(N)} \quad (9.31)$$

Введена в такий спосіб розмірність є цілим числом і дорівнює Евклідовій розмірності для розглянутих вище прикладів. Проте існують самоподібні системи, в яких вона не дорівнює цілому числу.

Наведемо кілька прикладів. Розглянемо кусковоподібну криву на рис. 9.5. Вона складається із восьми елементів ($N = 8$). Виконаємо наступні

дії. Кожний з елементів замінюється такою ж кусковоподібною кривою з коефіцієнтом подібності $\tau(N)=1/4$ У подальшому кожний з елементів од-

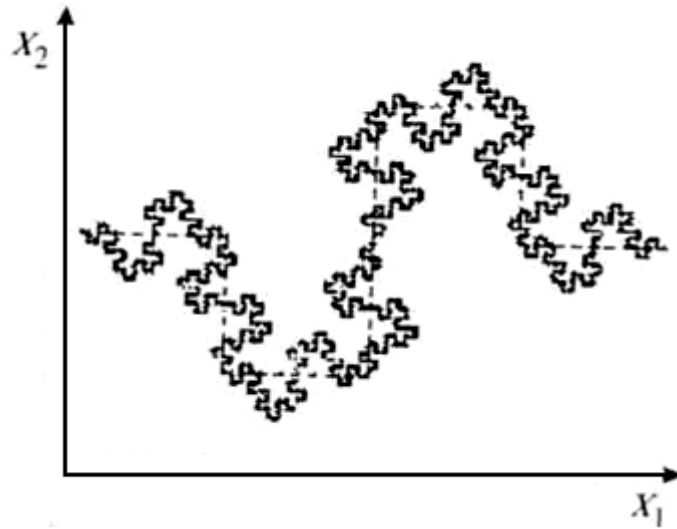


Рис. 9.5. Формування фрактальної структури

ржаної кривої замінюється новою кусковоподібною кривою і так далі. Собі подібна крива, яка формується після нескінченної послідовності таких перетворень, має нескінченну довжину, а її фрактальна розмірність становить:

$$D = \frac{\ln 8}{\ln 4} \approx 1,5 \quad (9.32)$$

Іншим прикладом є розмірність Канторової множини. Ця множина формується так. Виділяється одна третина одиничного інтервалу. Потім така сама дія виконується для інтервалів, що залишились, і так далі (рис. 9.6). Фрактальна розмірність системи визначається формулою

$$D = \frac{\ln 2}{\ln 3} \approx 0,63 \quad (9.33)$$



Рис.9.6. Канторова множина

Отже, фрактальна розмірність Канторової множини є меншою, ніж її геометрична розмірність.

Фрактали можуть бути регулярними, як у наведених прикладах, або стохастичними (наприклад для Броунівського руху).

Як ми вже зазначали, для логістичного відображення поблизу критичної точки ($\lambda_c = 3,57$) існує множина інтервалів на первинному інтервалі $[0,1]$, які не перекриваються. Множина подібна до Канторової множини. Розрахунки показують, що фрактальна розмірність системи дорівнює 0,538.

Для атрактора Лоренца з $\sigma = 10$, $b = 8/3$, $\lambda = 28$ розрахунки фрактальної розмірності дають $D = 2,06$. Це значить, що аттрактор Лоренца за розмірністю близький до двовимірного простору.